Lec 13 曲线的凹凸与拐点

13.1 凸函数与拐点的定义

定义 13.1 (凸函数与拐点)

设 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上有定义, 若 $\forall x_1,x_2\in(a,b)$ 都有 $f(\dfrac{x_1+x_2}{2})\leqslant\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 则称 $f(x)$ 在 (a,b) 上为凸函数. 称 I 为 $f(x)$ 的凸区间. 当上式中仅成立严格不等号时, 则称 $f(x)$ 在 (a,b) 上为严格凸函数. 连续曲线上凹凸部分的分界点称为拐点.

凹函数 (concave)$f(x)$ 定义为 $-f(x)$ 为凸函数 (convex).

例 13.1 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为凸函数; $y=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上为凹函数.

例 13.2 $y=\sin x$ 在 $(0,\pi)$ 上为凹函数, 在 $(\pi,2\pi)$ 上为凸函数. 且 $\sin x$ 处处连续, 因此 π 为 $\sin x$ 的拐点. 事实上 $f(x)=\sin x, g(x)=\cos x$ 在 $I=(-\infty,+\infty)$ 上都有无数个拐点.

13.2 凸函数及拐点判别法

定理 13.1 (凸性的零阶导判别法)

设 $f(x)$ 在 I 上有定义, 若 $\forall x_1,x_2\in I,\forall\lambda_1,\lambda_2\in(0,1),\lambda_1+\lambda_2=1$ 都有 $f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\leqslant\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)$, 则 $f(x)$ 在 I 上为凸函数.

证明 这个其实不是很好证明, 较为简单的做法是使用向前向后递推法.

记

$$f\left(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2\right)\leqslant\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2) \tag{A}$$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \tag{B}$$

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n} \tag{C}$$

1. 第一步我们先证明: 式 (B) 成立 $\Rightarrow$ 式 (C) 成立.
   (a). 由式 (B) 知式 (C) 当 $n=2$ 时成立. 现证 $n=4$ 时式 (C) 成立. 事实上, 对 $x_1,x_2,x_3,x_4\in I$, 由式 (B), 我们有

$$\begin{aligned}f\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right)&=f\left(\frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}}{2}\right)\leqslant\frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)}{2}\\&\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)}{4}.\end{aligned}$$

   此即式 (C) 对 $n=4$ 成立. 一般来说, 对任一自然数 k, 重复上面方法, 应用 (B) 式 k

次, 可知
$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2k}}{2^k}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{2k})}{2^k}.$$
这说明式 (C) 对一切 $n=2^k$ 皆成立.

(b). 证明式 (C) 对 $n=k+1$ 成立时, 必对 $n=k$ 也成立记
$$A=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k},\quad 则\quad x_1+x_2+\cdots+x_k=kA,\quad 所以$$
$$A=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k+A}{k+1}.$$
因此式 (C) 对 $n=k+1$ 成立, 故
$$f(A)=\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k+A}{k+1}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_k)+f(A)}{k+1}.$$
不等式两边同时乘以 $k+1$, 减去 $f(A)$, 最后除以 k. 注意
$$A=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k},$$
我们得到
$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_k)}{k}.$$
此式表示式 (C) 对 $n=k$ 成立.

2. 第二步我们证明: 式 (C) 成立 $\Rightarrow$ 式 (A) 成立.

(a). 当 $\lambda_1=\dfrac{m}{n},\lambda_2=\dfrac{n-m}{n}$ 为有理数时,
$$\begin{aligned}f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)&=f\left(\frac{m}{n}x_1+\frac{n-m}{n}x_2\right)\\&=f\left(\frac{x_1+\cdots+x_1+x_2+\cdots+x_2}{n}\right)\\&\leqslant\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_2)}{n}\\&=\frac{m}{n}f(x_1)+\frac{n-m}{n}f(x_2).\end{aligned}$$

(b). 当 λ_1,λ_2 为无理数时, 由有理数的稠密性, 存在 $\lambda_n\to\lambda_1$, 由 f 的连续性, 有
$$\begin{aligned}f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)&=f\left(\lim_{n\to\infty}\lambda_nx_1+(1-\lambda_n)x_2\right)\\&=\lim_{n\to\infty}f(\lambda_nx_1+(1-\lambda_n)x_2)\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}\lambda_nf(x_1)+(1-\lambda_n)f(x_2)\\&=\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2).\end{aligned}$$

定理 13.2 (零阶导判别法)

$f(x)$ 在区间 I 上为凸函数 $\Leftrightarrow\forall x_1,x_2\in I,x_1<x_2$ 都有
$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

证明 必要性：设 $\alpha=\dfrac{x_2-x}{x_2-x_1}$, $1-\alpha=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$, 则有 $x=\alpha x_1+(1-\alpha)x_2$.

由 f 的凸性, 可知 $f(x)\leqslant \alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$.

将 $f(x)$ 表示成 $f(x)=\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$ 并代入式整理得

$$f(x)-f(x_1)\leqslant f(x_2)-f(x)\leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

利用不等式

$$\frac{a}{b}\leqslant\frac{a+c}{b+d}\leqslant\frac{c}{d},$$

其中 a,b,c,d 满足 $\dfrac{a}{b}\leqslant\dfrac{c}{d}, b>0, d>0$, 并取 $a=f(x)-f(x_1)$, $c=f(x_2)-f(x)$, $b=x-x_1$, $d=x_2-x$, 即完成必要性证明.

充分性：若定理中不等时成立, 故由不等式

$$f(x)-f(x_1)\leqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant f(x_2)-f(x),$$

推出

$$f(x)\leqslant\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2).$$

其中 $x=\alpha x_1+(1-\alpha)x_2$, 由 α 的任意性, 得到了 $\alpha\in(0,1)$, 所以函数 $f(x)$ 是凸的.

定理 13.3 (一阶导判别法)

若 $f'(x)$ 在 I 上存在, 则 $f(x)$ 在 I 上为凸函数 $\Leftrightarrow f'(x)$ 在 I 上单调增.

证明 必要求任取 $x_1,x_2\in I, x_1<x_2, x_1<x<x_2$, 应用定理**??**中第一个不等式, 有

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

同理, 对 $x_1<x'<x_2$, 应用定理**??**中的第二个不等式, 有

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

并令 $x'\to x_2$, 有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant f'(x_1)$$

所以 $f'(x_1)\leqslant\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. 根据 x_1,x_2 的任意性, 必须性证明毕.

充分析对任意的 $x_1<x<x_2$, 由微分中值定理, 存在 $\xi\in(x_1,x_2),\eta\in(x_1,x_2)$, 使得

$$f(x)-f(x_1)=f'(\xi)\cdot(x-x_1),\quad f(x_2)-f(x_1)=f'(\eta)\cdot(x_2-x_1)$$

因为 $f'(x)$ 单调增, 且 $x_1<x<x_2$, 即

$$f'(\xi)\leqslant f'(\eta)$$

可知函数 f 是凸函数.

定理 13.4 (二阶导判别法)

若 $f''(x)$ 在 I 上存在, 则 $f(x)$ 在 I 上为凸函数 $\Leftrightarrow f''(x)\geqslant 0, x\in I$.

证明 若二阶导存在, 则 $f''(x) \geqslant 0$ 等价于 $f'(x)$ 单调增, 由一阶导判别法即可.

定理 13.5

若 x_0 是 $f(x)$ 的拐点, 且 $f''(x_0)$ 存在, 则 $f''(x_0)=0$, 但反之不必然.

定理 13.6

若 $f(x)$ 在 x_0 处连续,$f''(x)$ 在 x_0 两侧存在, 异号,($f''(x_0)$ 可以不存在), 则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的拐点.

证明 这两个定理的证明仿照极值点的证明方式即可.

13.3 例题

例 13.3 设 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, 求 $f(x)$ 的凸区间, 拐点; 求 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的极值与最值.

解 $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\cdot(-x)$, $f''(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\cdot(x^2-1)$.

令 $f''(x)=0$, 得 $x=\pm1$, 在 $(-\infty,-1),(1,+\infty)$ 上 $f''(x)>0$, 在 $(-1,1)$ 上 $f''(x)<0$. 故 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1),(1,+\infty)$ 上为凸函数,$(-\infty,-1),(1,+\infty)$ 为凸区间;

$f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上为凹函数,$(-1,1)$ 为凹区间. 又 $f(x)$ 在 $x=\pm1$ 附近存在且连续, 故 $x=\pm1$ 为 $f(x)$ 的拐点.

$f'(x)=0$ 得 $x=0$,$f''(0)=-\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}<0$, 故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的唯一的极大值点, 由唯一性知最大值也为 $f(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

例 13.4 设 $f(x)=\dfrac{c}{a+\mathrm{e}^{-bx}}$, $x\in(-\infty,+\infty)$, 其中 $a,b,c>0$.

(1) 证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 中无极值点;

(2) 证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 中有一个拐点.

此曲线称为逻辑斯蒂曲线 (logistic curve), 或者称之为 S 型曲线.

解 $f'(x)=\dfrac{bc\mathrm{e}^{-bx}}{(a+\mathrm{e}^{-bx})^2}>0$, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 中严格单调递增, 故无极值点.

$f''(x)=\dfrac{b^2c\mathrm{e}^{-bx}\left(\mathrm{e}^{-bx}-a\right)}{(a+\mathrm{e}^{-bx})^3}$, 令 $f''(x)=0$, 得 $x=-\dfrac{\ln a}{b}$, 又 $f''(x)=0$ 的解唯一, 故 $x=-\dfrac{\ln a}{b}$ 为 $f(x)$ 的唯一的拐点.

作业 ex3.5:5,6,7,8(1)(4)(6),9;CH3:14(1)(4).